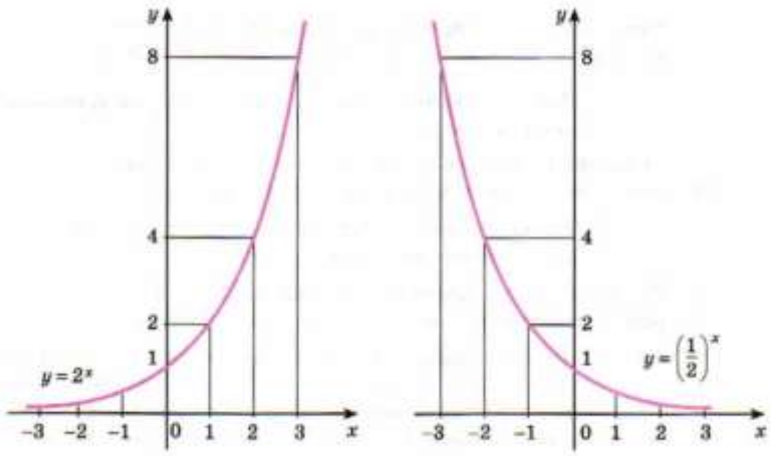
16.11.23

Математика

Тема: «Показательные уравнения и неравенства»

Показательная функция

$y = 2^x$ **$y = (\frac{1}{2})^x$**



Решение простейших показательных неравенств:

Простейшими считаются показательные неравенства вида: $\mathbf{a^x < a^y}$, $\mathbf{a^x > a^y}$. ($a^x \le a^y$, $a^x \ge a^y$).

Так же, как и при решении простейших показательных уравнений, одинаковые основания степеней опускают, но **знак** нового неравенства **сохраняют**, **если** функция $y=a^x$ является возрастающей (**$a > 1$**); **если** же показательная функция $y=a^x$ убывает (**$0 < a < 1$**), то **знак** нового неравенства **меняют на противоположный**:

$a^x < a^y \to x < y$, если **$a > 1$**; знак сохранен, так как функция возрастает;

$a^x < a^y \to x > y$, если **$0 < a < 1$**; функция убывает – знак поменялся;

Пример:

реши неравенство: $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x+1{,}5} < \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$*, запишем неравенство в виде:* $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x+1{,}5} < \left(\frac{1}{5}\right)^{0{,}5}$.

Основание неравенства меньше единицы: $0 < \frac{1}{5} < 1$.

Поэтому показатель левой части больше показателя правой части неравенства:
$4x + 1{,}5 > 0{,}5$,
получаем решение $x > -0{,}25$.

Задача 3 Решить неравенство $3^{x^2-x} < 9$.

▶ Запишем неравенство в виде $3^{x^2-x} < 3^2$. Так как $3 > 1$, то $x^2 - x < 2$, откуда $x^2 - x - 2 < 0$, $-1 < x < 2$.

Ответ $-1 < x < 2$. ◁

Задача 4 Решить неравенство $16^x + 4^x - 2 > 0$.

▶ Обозначим $4^x = t$, тогда получим квадратное неравенство $t^2 + t - 2 > 0$. Это неравенство выполняется при $t < -2$ и при $t > 1$. Так как $t = 4^x$, то получим два неравенства $4^x < -2$, $4^x > 1$. Первое неравенство не имеет решений, так как $4^x > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$. Второе неравенство можно записать в виде $4^x > 4^0$, откуда $x > 0$.

Ответ $x > 0$. ◁

Решить неравенство (**228—229**).

228 1) $3^x > 9$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$;

4) $4^x < \frac{1}{2}$; 5) $2^{3x} \geqslant \frac{1}{2}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leqslant \frac{1}{9}$.